

[최고의 수험물리 전문가]

윤형철

변리사 탄탄물리

[개념+기출]

— 03장. 2차원 운동 —

“물리는 외우는 과목이 아니라 생각하는 과목입니다.”

세 가지 강의 철학

- 성장기반 물리
(Grow-based Physics)
- 취사선택 물리
(Cut-off Strategy Physics)
- 생각하는 물리
(Thinking Physics)

목차

1. 중력장의 1차원 운동(직선)
2. 중력장의 2차원 운동(평면)
3. 일반적인 2차원 운동(평면)



물리

윤형철 교수

물리 윤형철 교수입니다.

약력

전남과학고등학교 졸업
서울대학교 사범대학 물리교육과 졸업

전 대치 미래탐구
전 대치 새움학원
현 대치 링크물리
현 변리사스쿨 물리 전문교수

[역학 개관]

물리현상 (문제상황)	→ 물리량	물리법칙
물체의 운동 <표현>	① 시간 ② 위치 ③ 변위 ④ 거리 ⑤ 속도 ⑥ 속력 ⑦ 가속도	없음 (미적분+기하) 그래프 해석
물체의 운동 <원인>	① 힘/알짜 힘 ② 돌림힘/알짜 돌림힘	[뉴턴 운동법칙] - 제1법칙 (관성) - 제2법칙 (질량/가속도) - 제3법칙 (작용/반작용)
충돌/융합/분열(폭발) <순식간>	① 운동량/운동량 변화량 ② 충격량/충격력	① 운동량 보존법칙 ② 충격량-운동량 변화량 정리
물체의 운동 <스칼라적 접근>	① 일 ② 운동에너지 ③ 위치에너지-보존력 ④ 역학적 에너지	① 알짜일-운동에너지 변화량 정리 ② 보존력-위치에너지 관계 ③ 역학적 에너지 보존법칙

I. 물체의 운동

1. 물체(body) - 역학적 구분

- (1) 질점 - 입자 (크기 무시)
- (2) 강체 - 고체 (크기 고려)
- (3) 유체 - 액체/기체 (크기 고려)

2. 운동(motion)

- (1) 정의
운동이란 시간에 따라 물체의 위치가 변하는 물리현상이다.
- (2) 분류
 - 1) 병진운동 : 물체가 전체적으로 이동하는 운동(예. 자유낙하 하는 물체)
 - 2) 회전운동 : 물체가 전체적으로 이동하지 않고 고정된 한 점을 중심으로 돌아가는 운동 (예. 선풍기 날개의 운동)
 - 3) 진동운동 : 물체가 일정한 점을 중심으로 왕복하는 운동 (예. 시계추의 운동)

II. 중력장에서의 1차원 운동 (1장과 중복)

개념 POINT

1. 서론

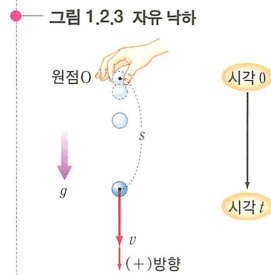
- (1) 지구의 중력 : 지구가 물체를 끌어당기는 힘(인력)
- (2) 중력장 : 지구 주위에 지구의 중력이 미치는 공간
- (3) 중력가속도 g : 지표면 근처에서 지구의 중력에 의해 생기는 가속도. $g = 9.8m/s^2 \approx 10m/s^2$

2. 자유낙하 운동

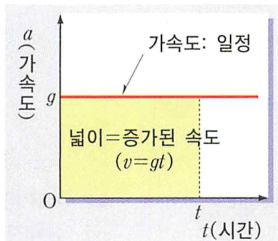
- (1) 정의 : 연직 아래로 초속도가 없이 중력 가속도로 낙하하는 등가속도 직선 운동
- (2) 공식

자유 낙하 운동은 그림 1.2.3과 같이 처음 위치를 원점으로 하고, 그 위치에서 연직 아래 방향을 (+)방향으로 하면 $v_0=0$, $a=g$ 인 등가속도 직선 운동이다.

등가속도 직선 운동	자유 낙하 운동
t 초 후의 속도 $v=v_0+at$	$v=gt$ ($v-t$ 식)
t 초 후의 거리 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$s=\frac{1}{2}gt^2$ ($s-t$ 식)
속도와 거리 $2as=v^2-v_0^2$	$2gs=v^2$ ($s-v$ 식)

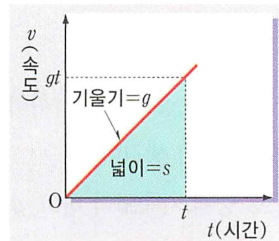


- 1) 낙하거리 s 만큼 자유낙하하는 시간 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$
- 2) 낙하거리 s 만큼 자유낙하하는 물체의 순간속도 $v = \sqrt{2gs}$
- (3) 그래프



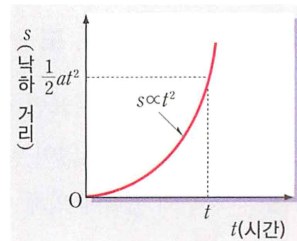
$a-t$ 그래프

중력이 일정하게 작용하므로 등가속도 운동을 한다.



$v-t$ 그래프

등가속도 운동을 하므로 속력이 일정하게 증가한다.



$s-t$ 그래프

낙하 거리는 시간의 제곱에 비례하여 증가한다.

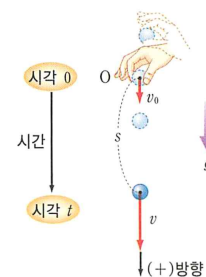
3. 연직투하 운동

- (1) 정의 : 연직 아래로 일정한 초속도로 던져져 중력 가속도로 가속하는 직선 운동
- (2) 공식

그림 1.2.15와 같이 연직 아래 방향으로 어떤 속도(초속도 v_0)로 던져진 물체에 작용하는 힘은 중력뿐이므로 중력 가속도 g 로 등가속도 운동을 한다. 물체가 손을 떠날 때까지는 손에서 힘을 받아 가속되지만 물체가 속도 v_0 로 되어 손을 떠나면 그 후에는 손에서는 힘을 받지 않고 중력에 의해서만 가속된다.
 시간 0인 원점에서 물체를 초속도 v_0 로 아래로 던진 후 시간 t 에서의 속도 v 와 낙하한 거리 s 는 등가속도 직선 운동 공식에 $a=g$ 를 대입하여 구한다.

등가속도 직선 운동	연직 투하 운동
t 초 후의 속도 $v=v_0+at$	$v=v_0+gt$
t 초 후 낙하 거리 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$
속도와 거리 $2as=v^2-v_0^2$	$2gs=v^2-v_0^2$

그림 1.2.15 연직 투하 운동



4. 연직투상 운동

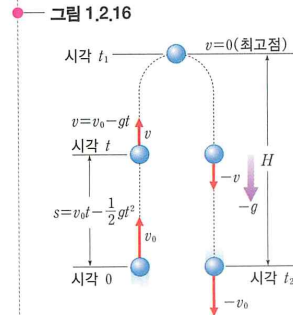
- (1) 정의 : 연직 위로 일정한 초속도로 던져져 중력 가속도로 가속하는 직선 운동
(2) 공식

그림 1.2.16과 같이 연직 위로 초속도 v_0 로 던져진 물체는 운동하는 동안 연직 아래 쪽으로 중력($F=mg$)을 받는다. 따라서 물체는 연직 아래 방향(힘의 방향)의 가속도 g 가 생기므로 매초 9.8m/s씩 속도가 감소한다.

초속도 v_0 와 중력 가속도 g 의 방향이 반대이므로 초속도 방향을 (+)로 하면 물체는 가속도가 $-g$ 인 등가속도 직선 운동을 한다.

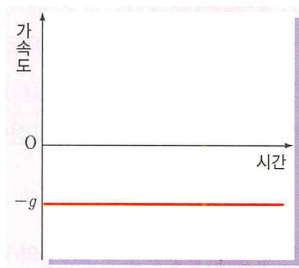
시각 0에서 물체를 초속도 v_0 로 던져 올렸다면 시각 t 에서 물체의 속도 v 와 변위(운동 거리) s 는 등가속도 직선 운동 공식에 $a=-g$ 를 대입하여 구한다.

등가속도 직선 운동	연직 투상 운동
t 초 후의 속도 $v=v_0+at$	$v=v_0-gt$
t 초 후 낙하 거리 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$
속도와 거리 $2as=v^2-v_0^2$	$-2gs=v^2-v_0^2$

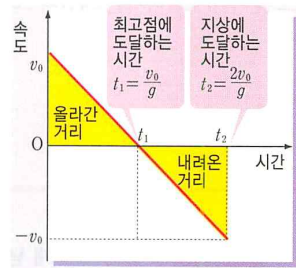


- 1) 최고점 도달시간(t_1) : $t_1 = \frac{v_0}{g}$ ($\because v=0$)
- 2) 최고점 높이(H) : $H = \frac{v_0^2}{2g}$ ($\because v=0$)
- 3) 출발점 도달시간 (t_2) : $t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g}$ (\because 대칭성)

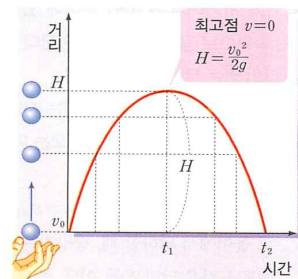
(3) 그래프



(가) 가속도 - 시간 그래프



(나) 속도 - 시간 그래프



(다) 거리 - 시간 그래프

(4) 특징 : 대칭성

연직 투상운동은 최고점에 도달할 때까지의 운동과 최고점에서 처음의 위치로 돌아오는 자유낙하 운동이 대칭이다. 따라서 최고점 이후의 자유낙하 운동으로 해석하는 것이 훨씬 편리하다. 결과적으로 임의의 높이에서 상승속도와 낙하속도는 크기가 같고 방향이 반대이며, 그 높이까지 올라가는 시간과 그 높이에서 처음 위치로 낙하하는 시간은 같다.

개념 POINT

III. 중력장에서의 2차원 운동(평면)

개념 POINT

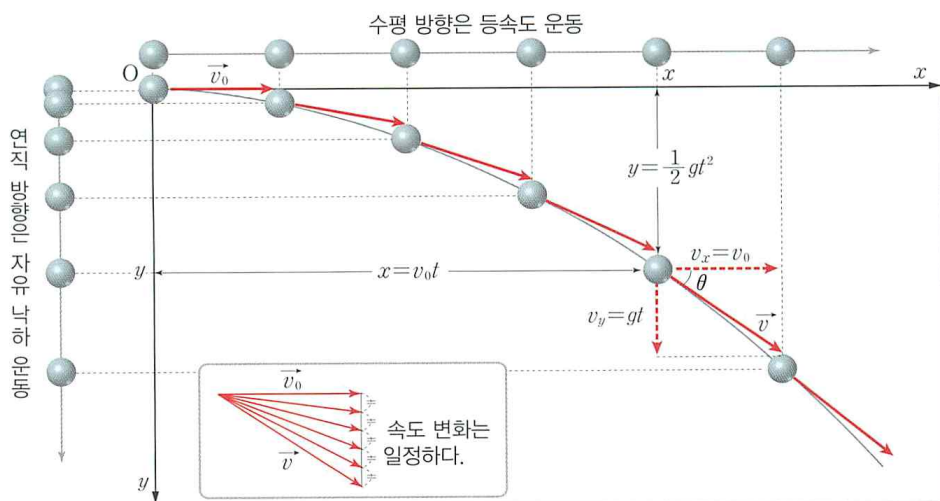
1. 서론 : 2차원 운동의 특징

실험 결과 평면상의 운동에서 서로 수직인 x 방향 운동과 y 방향 운동은 서로 어떠한 영향도 주지 않는다. 따라서 평면상의 운동은 x 방향 운동과 y 방향 운동의 각각 독립된 2개의 운동으로 나타낼 수 있다.

2. 수평투사운동

수평 방향으로 \vec{v}_0 의 속도로 던진 물체의 운동은 수평 방향인 x 방향과 연직 방향인 y 방향으로 각각 독립하여 기술할 수 있다. 공기 저항을 무시할 때 물체는 연직 아래 방향의 중력만을 받으며 운동하는데, 수평 방향으로는 가속도가 0이므로 등속도 운동을 하고, 연직 방향으로는 연직 아래 방향으로 가속도가 g 로 일정한 등가속도 운동(자유 낙하 운동)을 한다. 물체의 운동을 기술하기 위해 오른쪽과 연직 아래 방향을 각각 (+)로 나타내면, 가속도, 처음 속도, 각 방향의 운동은 다음과 같다.

구분	수평 방향(x 성분)	연직 방향(y 성분)
가속도	$a_x=0$	$a_y=g$
처음 속도	$v_{0x}=v_0$	$v_{0y}=0$
운동	등속도 운동	자유 낙하 운동



▲ 수평 방향으로 던진 물체의 운동

(1) t 초 후의 속도(\vec{v}): 시간 t 초 후 물체의 속도 \vec{v} 의 수평 방향 성분 v_x 와 연직 방향 성분 v_y 는 다음과 같다.

- 수평 방향: $v_x = v_0$ (등속도 운동)
- 연직 방향: $v_y = gt$ (자유 낙하 운동)

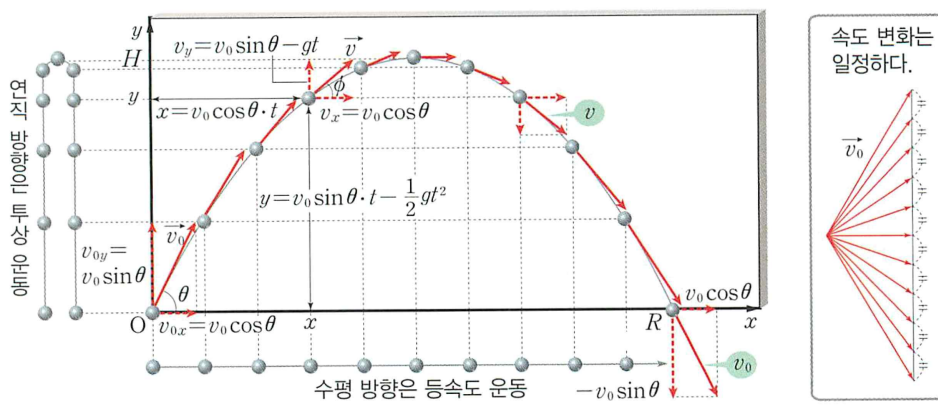
따라서 t 초 후 물체의 속도 v 의 크기와 방향은 다음과 같다.

- 크기: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$
- 방향: $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$

3. 포물선 운동

수평면과 각 θ 를 이루는 방향의 속도 \vec{v}_0 로 비스듬히 위로 던진 물체는 공기 저항을 무시할 때 연직 아래 방향의 중력만을 받으며 운동하므로, 물체는 평면상의 등가속도 운동으로 포물선 경로를 따라 운동한다. 즉, 이 물체의 운동은 수평 방향으로는 등속도 운동, 연직 방향으로는 연직 위로 던진 물체의 운동(등가속도 운동)으로 기술할 수 있다. 오른쪽과 연직 위 방향을 각각 (+)로 나타내면, 가속도, 처음 속도, 각 방향의 운동은 다음과 같다.

구분	수평 방향(x 성분)	연직 방향(y 성분)
가속도	$a_x=0$	$a_y=-g$
처음 속도	$v_{0x}=v_0\cos\theta$	$v_{0y}=v_0\sin\theta$
운동	등속도 운동	연직 위로 던진 물체의 운동



▲ 비스듬히 위로 던진 물체의 운동

(1) t 초 후의 속도(\vec{v}): 시간 t 초 후 물체의 속도 \vec{v} 의 수평 방향 성분 v_x 와 연직 방향 성분 v_y 는 다음과 같다.

- 수평 방향: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$ (등속도 운동)
- 연직 방향: $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt$ (연직 위로 던진 물체의 운동)

따라서 t 초 후 물체의 속도 \vec{v} 와 수평 방향이 이루는 각을 ϕ 라고 하면, \vec{v} 의 크기와 방향은 다음과 같다.

• 크기: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - gt)^2}$

• 방향: $\tan \phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta}$

(2) t 초 후의 변위(\vec{r}): 출발점을 원점으로 할 때 t 초 후 물체의 변위 \vec{r} 의 x, y 성분은 다음과 같다.

• 수평 방향: $x = v_0 \cos \theta \cdot t$

• 연직 방향: $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

위 변위의 x 성분의 식을 $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ 로 변환하여 변위의 y 성분의 식에 대입하면, 다음과 같이 물체의 운동 경로가 포물선으로 나타남을 알 수 있다.

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (\text{포물선 방정식})$$

개념 POINT

(3) 포물선 운동의 최고점

비스듬히 위로 던진 물체가 최고점에 도달하면 물체의 속도는 수평 방향 성분이 $v_0 \cos \theta$ 이고, 연직 방향 성분은 0이 된다. 따라서 최고점 도달 시간과 최고점의 높이 등을 구할 때에는 그 점에서 연직 방향의 속도 성분이 0이므로 연직 방향의 운동 식에 $v_y = 0$ 을 대입하여 구한다.

① 최고점에서의 속도(\vec{V}): 최고점에서의 속도 \vec{V} 의 수평 성분 $V_x = v_0 \cos \theta$ 이고, 연직 성분 $V_y = 0$ 이므로, \vec{V} 의 크기와 방향은 수평 성분과 같다.

• 크기: $V = V_x = v_0 \cos \theta$ • 방향: 수평 방향

② 최고점 도달 시간(T_1): 최고점 도달 시간은 $v_y = 0$ 일 때의 시간이므로, $v_y = v_0 \sin \theta - gt$ 식으로 구한다.

$$v_y = v_0 \sin \theta - gT_1 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

③ 최고점의 높이(H): 연직 방향으로 등가속도 운동을 하는데, 처음 속도의 연직 방향 성분 $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ 이고, 최고점에서 속도의 연직 방향 성분 $v_y = 0$ 이므로 $-2gy = v_y^2 - v_{0y}^2$ 에서 최고점 높이 H 는 다음과 같다.

$$-2gH = 0^2 - (v_0 \sin \theta)^2 \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

④ 최고점까지의 수평 이동 거리(x_1): 수평 방향으로 $v_0 \cos \theta$ 의 속도로 등속도 운동을 하므로, 시간 T_1 동안 수평 방향으로 이동한 거리 x_1 은 다음과 같다.

$$x_1 = v_{0x} T_1 = v_0 \cos \theta \times \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

(4) 수평 도달 거리(R)

비스듬히 위로 던진 물체가 출발점과 동일 수평면에 떨어졌을 때 출발점에서 그 지점까지의 거리를 수평 도달 거리라고 하며, 이때 연직 방향의 변위 y 는 0이 된다.

① 수평 도달 거리까지 걸리는 시간(T_2): 포물선을 그리며 다시 수평면에 도달할 때까지의 시간 T_2 는 연직 방향의 속도 $v_0 \sin \theta$ 로 연직 위로 던진 물체가 출발점으로 되돌아오는 데 걸리는 시간과 같다. 따라서 연직 방향의 운동 식 $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ 을 이용하여 $y = 0$ 이 되는 시간 T_2 를 구하면 다음과 같이 수평 도달 시간 T_2 는 최고점 도달 시간 T_1 의 2배가 된다.

$$0 = \left(v_{0y} - \frac{1}{2}gT_2\right)T_2, T_2 \neq 0 \Rightarrow T_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = 2T_1$$

② 수평 도달 거리(R): 비스듬히 위로 던진 물체가 시간 T_2 동안, 즉 수평 방향으로 최고점 도달 시간의 2배가 되는 시간 동안 수평 방향의 속도 $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ 로 등속도 운동을 한 거리이므로 다음과 같다.

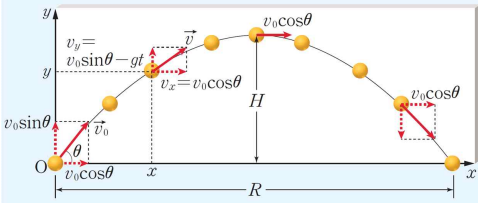
$$R = v_{0x} T_2 = v_0 \cos \theta \times \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

• 수평 최대 도달 거리: 물체를 일정한 속력으로 던질 때 수평 도달 거리 R 가 최대가 되는 것은 $\sin 2\theta$ 가 최댓값인 1이 될 때, 즉 $2\theta = 90^\circ$, $\theta = 45^\circ$ 인 경우이다. 이때 R 의 최댓값

$R_M = \frac{v_0^2}{g}$ 을 수평 최대 도달 거리라고 한다.

1 포물선 운동의 최고점과 수평 도달 거리

연직 아래 방향으로 가속도가 \vec{g} 인 공간에서 수평면과 θ 의 각도로 처음 속도 \vec{v}_0 로 던진 물체의 운동은 다음과 같다.



(1) 최고점 높이: $-2gH = 0^2 - (v_0 \sin \theta)^2 \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$

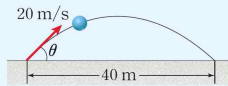
(2) 최고점 도달 시간: $v_0 \sin \theta - gT_1 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$

(3) 수평 도달 거리:

$$R = v_0 \cos \theta \times 2T_1 = v_0 \cos \theta \times \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

예제

① 그림은 수평면에서 수평면과 θ 의 각도로 20 m/s의 속력으로 물체를 비스듬히 위로 던졌을 때 물체가 포물선 경로를 따라 운동하여 수평 도달 거리가 40 m인 것을 나타낸 것이다. (단, 중력 가속도는 10 m/s^2 이고, 공기 저항은 무시한다.)



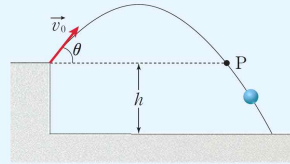
- (1) 물체를 던진 방향과 수평면이 이루는 각 θ 를 구하시오.
- (2) 수평면으로부터 최고점의 높이를 구하시오.
- (3) 물체를 던진 순간부터 수평면에 떨어질 때까지 걸리는 시간을 구하시오.

해설 (1) 수평 도달 거리는 $40 \text{ m} = \frac{(20 \text{ m/s})^2 \times \sin 2\theta}{10 \text{ m/s}^2}$ 이므로 $\theta = 45^\circ$ 이다.
 (2) 최고점의 높이 $H = \frac{(20 \text{ m/s})^2 \times \sin^2 45^\circ}{2 \times 10 \text{ m/s}^2} = 10 \text{ m}$ 이다.
 (3) 최고점 도달 시간 $T_1 = \frac{20 \text{ m/s} \times \sin 45^\circ}{10 \text{ m/s}^2} = \sqrt{2} \text{ s}$ 이므로, 수평 도달 거리까지 걸리는 시간은 $2\sqrt{2} \text{ s}$ 이다.

정답 (1) 45° (2) 10 m (3) $2\sqrt{2} \text{ s}$

2 출발점과 도착점의 높이가 다른 경우

수평면과 θ 의 각도로 처음 속도 \vec{v}_0 로 던진 물체가 던진 지점보다 높이 h 만큼 낮은 지점에 떨어졌을 때의 운동은 다음과 같다.

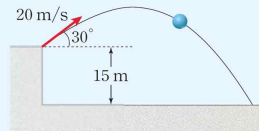


- (1) 물체는 처음과 같은 높이의 P점까지는 수평면에서 비스듬히 위로 던진 물체와 동일한 포물선 운동을 한다.
- (2) 물체를 던진 지점부터 떨어진 지점까지 걸린 시간이 t_3 일 때 등가속도 직선 운동의 식으로부터 다음의 관계식이 성립한다. (단, g 는 중력 가속도이다.)

$$-h = v_0 \sin \theta \cdot t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2$$

예제

② 그림은 수평면으로부터 높이 15 m에서 수평면과 30° 의 각도로 20 m/s의 속도로 던진 물체의 포물선 경로를 나타낸 것이다. (단, 중력 가속도는 10 m/s^2 이고, 공기 저항은 무시한다.)



- (1) 물체가 수평면에 도달할 때까지 걸리는 시간을 구하시오.
- (2) 물체가 수평면에 도달할 때까지 수평 이동 거리를 구하시오.

해설 (1) 연직 방향으로 등가속도 직선 운동을 하므로 $-15 \text{ m} = 20 \text{ m/s} \times \sin 30^\circ \times t - \frac{1}{2} \times 10 \text{ m/s}^2 \times t^2$ 에서 $t = 3 \text{ s}$ 이다.
 (2) 수평 방향으로 등속도 운동을 하므로 $20 \text{ m/s} \times \cos 30^\circ \times 3 \text{ s} = R$ 에서 수평 이동 거리 $R = 30\sqrt{3} \text{ m}$ 이다.

정답 (1) 3 s (2) $30\sqrt{3} \text{ m}$

개념 POINT

IV. 2차원 평면 운동

개념 POINT

1. 벡터

(1) 정의

벡터란 크기와 단위로만 표시할 수 없고, 방향까지 표시해야 하는 물리량을 말한다.

(2) 표시

- 1) 기하적 표시 : 화살표
- 2) 해석적 표시 : 좌표계의 성분

(3) 성질

- 1) 벡터의 상등
- 2) 벡터의 실수배
- 3) 벡터의 역벡터

벡터의 표시	벡터의 상등	벡터의 실수배	벡터의 역벡터

(4) 연산

- 1) 벡터의 합성
 - ① 벡터의 덧셈
 - ② 벡터의 뺄셈

벡터의 덧셈		벡터의 뺄셈	
평행사변형법	삼각형법	평행사변형법	삼각형법

2) 벡터의 분해

직각 좌표계에서의 벡터의 분해	합성벡터의 성분 벡터

3) 벡터의 곱셈

- 벡터의 내적(스칼라곱)
- 벡터의 외적(벡터곱)

개념 POINT

두 벡터를 곱하는 방법에는 두 가지가 있다. 두 벡터를 곱한 결과가 스칼라가 나오는 스칼라 곱과 두 벡터를 곱한 결과가 벡터가 나오는 벡터곱이 그것이다.

1 스칼라곱(scalar product, dot product, 내적)

두 벡터 \vec{A} 와 \vec{B} 의 스칼라곱은 두 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각 θ 의 코사인의 곱으로 정의되는 스칼라량으로, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 라고 표시한다.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

(A, B : \vec{A}, \vec{B} 각각의 크기, θ : 사잇각)

예를 들어 물체에 힘을 작용하여 일을 할 때 일은 힘과 변위의 스칼라곱으로 정의된다. 즉, 힘 \vec{F} 와 변위 \vec{s} 는 모두 벡터량이지만, 그 스칼라곱인 일 W 는 스칼라량이 된다.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta$$

- 두 벡터 사이의 각도 $\theta=0^\circ$ 이면 스칼라곱의 크기는 최대가 되며, $\theta=90^\circ$ 가 되면 두 벡터의 스칼라곱은 0이 된다.
- 스칼라곱은 교환 법칙이 성립한다. $\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = AB \cos \theta$
- 스칼라곱은 분배 법칙이 성립한다. $\Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

2 벡터곱(vector product, cross product, 외적)

두 벡터 \vec{A} 와 \vec{B} 의 벡터곱은 $\vec{A} \times \vec{B}$ 로 표시하고, 그 결과로 새로운 벡터 \vec{C} 가 생기며, 그 크기와 방향은 다음과 같다.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

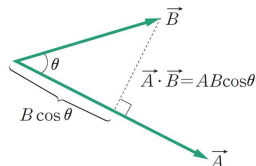
• \vec{C} 의 크기: \vec{A} 와 \vec{B} 가 만든 평행사변형의 넓이이며, 다음과 같이 정의된다.

$$C = AB \sin \theta \quad (\text{단, } \theta \text{는 } \vec{A} \text{와 } \vec{B} \text{의 사잇각 중 작은 각})$$

• \vec{C} 의 방향: 오른쪽 그림과 같이 \vec{A} 와 \vec{B} 의 꼬리를 일치시킨 후 오른손의 네 손가락을 \vec{A} 에서 각 θ 를 지나 \vec{B} 방향으로 감아칠 때 엄지손가락이 가리키는 방향이 \vec{C} 의 방향이다. (\Rightarrow 오른나사를 \vec{A} 에서 각 θ 를 지나 \vec{B} 쪽으로 돌릴 때 오른나사가 진행하는 방향)

- 두 벡터 사이의 각도 $\theta=0^\circ$, $\theta=180^\circ$ 이면 벡터곱의 크기는 0이 되며, $\theta=90^\circ$ 가 되면 벡터곱의 크기는 최대가 된다.
- 벡터곱에서는 곱하는 순서가 달라지면 방향이 반대가 되므로, 교환 법칙이 성립하지 않는다.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$



▲ 스칼라곱 \vec{A} 의 크기와 \vec{A} 에 대한 \vec{B} 의 사영인 $B \cos \theta$ 의 곱과 같다.

단위벡터의 스칼라곱

스칼라곱의 정의에 따라 단위벡터의 스칼라곱은 다음과 같다.

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \hat{j} \cdot \hat{j} = 1, \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0, \hat{i} \cdot \hat{k} = 0, \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0, \hat{k} \cdot \hat{i} = 0, \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

따라서 \vec{A}, \vec{B} 를 성분 벡터로 나타내면

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

이므로, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

단위벡터의 벡터곱

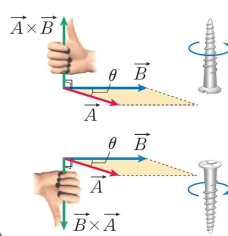
$$[\vec{A} \times \vec{B}] = AB \sin \theta \text{에서}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0, \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \hat{j} \times \hat{j} = 0, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

벡터곱의 방향

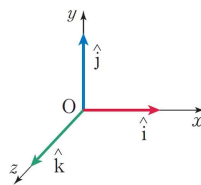


2. 단위 벡터

1 단위벡터

크기가 1이며, 특정한 방향을 갖는 벡터로, 단순히 방향을 나타내는 데 사용된다. 주로 $\hat{}$ (hat) 기호를 사용하여 단위벡터를 표시한다. 예를 들어 직교좌표계의 단위벡터인 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 는 각각 $+x, +y, +z$ 방향을 나타내며, 성분이 각각 $A_x=3, A_y=4, A_z=2$ 인 벡터 \vec{A} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$



2 벡터의 합과 차

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ 와 $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ 의 합 또는 차는 각각의 성분을 대수적으로 더하거나 빼서 얻는다.

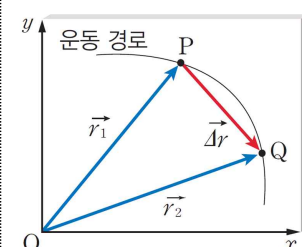
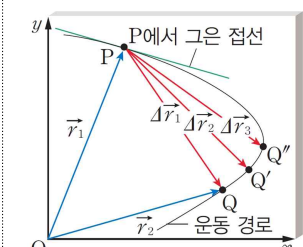
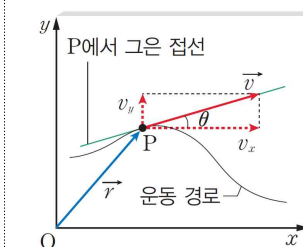
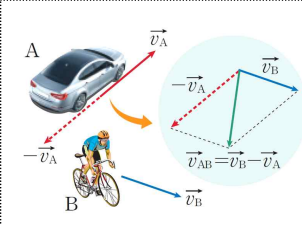
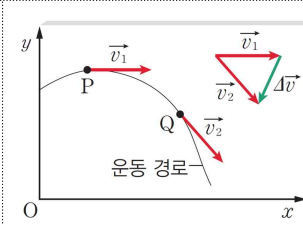
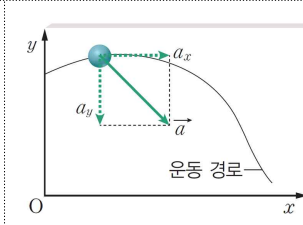
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

3. 2차원 평면 운동

평면상의 운동은 벡터로 나타낸다.

개념 POINT

<p>위치벡터와 변위벡터</p> 	<p>평균속도 벡터</p> 	<p>순간속도 벡터</p> 
<p>상대속도 벡터</p> 	<p>평균가속도 벡터</p> 	<p>순간가속도 벡터</p> 

■ 변리사 기출문제

개념 POINT

1. [2006년 변리사] - 포물선 운동

지점 A로부터 수평 방향으로 200m, 수직으로 40m 높이에 표적을 설치하였다. 지점 A에서 표적을 향하여 수평면과 45° 위쪽 방향으로 포탄을 쏘았을 때, 이 표적을 맞추기 위한 포탄의 초기 속력은 얼마인가? (단, 공기와의 마찰은 무시하고, 중력가속도는 10m/s^2 이라 놓는다.)¹⁾

- ① 40m/s ② $30\sqrt{2}\text{m/s}$ ③ 50m/s ④ $40\sqrt{2}\text{m/s}$ ⑤ 60m/s

2. [2011년 변리사] - 포물선 운동

건물 옥상에서 속력 40m/s 로 수평으로 던져진 물체가 지표면에 닿는 순간, 속력이 50m/s 였다. 옥상으로부터 지표면에 도달하기까지 걸리는 시간은 얼마인가? (단, 공기의 저항은 무시하며, 중력가속도는 10m/s^2 이다.)²⁾

① 2s

② 3s

③ 4s

④ 5s

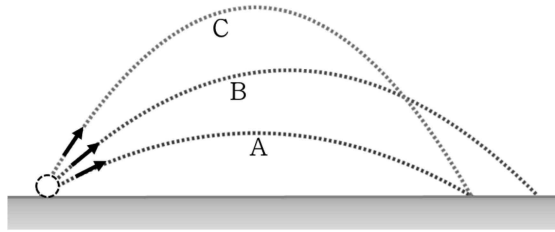
⑤ 6s

개념 POINT

3. [2019년 변리사] - 포물선 운동의 대칭성

그림과 같이 질량이 같은 물체 A, B, C를 수평면과 이루는 각이 각각 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 가 되도록 동시에 던졌더니 3개의 물체는 각각 포물선 운동을 하였다. A, B, C의 초기 속력은 모두 같다. 동시에 던져진 A, B, C가 최고점에 도달할 때까지 걸린 시간을 T_A, T_B, T_C 라 할 때 이 크기를 비교한 것으로 옳은 것은?³⁾

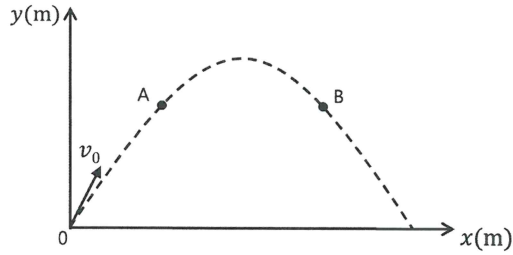
개념 POINT



- ① $T_A < T_B < T_C$ ② $T_A < T_C < T_B$ ③ $T_B < T_C < T_A$
 ④ $T_C < T_A < T_B$ ⑤ $T_C < T_B < T_A$

4. [2025년 변리사] - 포물선 운동

그림과 같이 시간 $t=0\text{s}$ 인 순간에 초기 속력 v_0 으로 수평면에 대해 일정한 각으로 발사된 물체가 포물선 운동을 하였다. 포물선 궤적 위의 두 점 A, B는 각각 $t=1\text{s}$ 와 $t=3\text{s}$ 인 순간에 물체의 위치를 나타낸 것으로, 두 점은 수평면으로부터 동일한 높이에 있고, 두 점 사이의 거리는 20m 이다. v_0 은? (단 중력가속도는 10m/s^2 이고, 물체의 크기는 무시한다.)⁴⁾



- ① 10m/s ② $10\sqrt{2}\text{m/s}$ ③ $10\sqrt{5}\text{m/s}$ ④ 25m/s ⑤ 30m/s

개념 POINT

5. [2002년 변리사] - 2차원 평면 운동

강폭이 200m이고 유속이 6m/s로 일정하게 흐르는 강에서 10m/s로 달리는 배로 강을 건너려고 한다. 가장 짧은 거리로 강을 건너는 데 걸리는 시간은 얼마인가? (단, 강의 모든 곳에서 유속은 일정하고, 배는 가속도 운동을 하지 않고 일정한 속력으로 달린다고 가정한다.)⁵⁾

① 20초

② 25초

③ 30초

④ 40초

⑤ 약 67초

개념 POINT

■ 개념확인문제

- 어떤 소설의 주인공은 수도물 새는 소리에 한밤중에 깨어난다. 수도꼭지에서 물방울이 떨어지는 순간에, 수도꼭지에서 19.6 cm 아래의 싱크대 바닥에 다른 물방울이 닿기 직전이며, 두 개의 물방울이 공중에 떠 있다. 1초 동안에 몇 개의 물방울이 떨어져서 주인공을 깨우는가?⁶⁾

개념 POINT

2. 화분이 발코니로부터 떨어졌다. 높이 1.25m의 창문을 지나가는데 0.1초 걸렸다. 창문의 아래턱으로부터 발코니까지의 높이를 구하라. (단, 중력가속도는 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 으로 계산하여라.)⁷⁾

개념 POINT

3. 길이 l 의 막대를 연직으로 유지했다가 조용히 놓아 자유낙하시켰다. 막대의 밑 끝이 어느 점 A를 통과하는 시간을 t_1 , 위 끝이 A를 통과하는 시간을 t_2 라 하면 중력 가속도 g 는?⁸⁾

개념 POINT

4. 어떤 낙하하는 물체가 낙하 시간의 마지막 1s동안에 전체 낙하 거리의 64%를 움직인다.
이 물체가 낙하한 높이는 얼마인가?⁹⁾

개념 POINT

5. 연직 위로 던져 올린 공이 한 점 P를 2초 만에 올라가면서 통과하고 3초 만에 내려오면서 통과하였다(단, 중력 가속도는 10m/s^2 으로 한다).¹⁰⁾

개념 POINT

- (1) 이 공의 초속도는 얼마인가?
- (2) 공을 던진 위치에서 점 P까지의 높이는 얼마인가?
- (3) 점 P를 통과할 때 공의 속력은 얼마인가?
- (4) 점 P에서 최고점까지의 높이는 얼마인가?

6. 지면으로부터 높이 h 인 곳에서 공 A를 가만히 놓아 떨어뜨리고 동시에 바닥에서는 공 B를 연직 위로 던져 올렸더니 두 공이 높이 $\frac{2}{3}h$ 인 곳에서 서로 스치듯이 지나갔다. (단, 중력 가속도는 g 이다.)¹¹⁾

개념 POINT

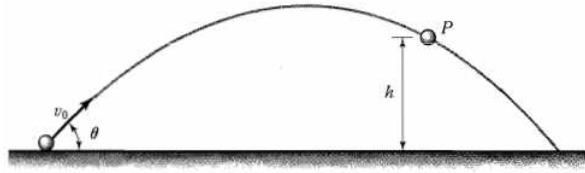
(1) 공 B의 초속도는 얼마인가?

(2) 두 공이 만나는 순간 공 B의 속력은 얼마인가?

7. 어떤 물체를 수평 방향과 각 θ 를 이루는 방향을 향하여 v_0 의 속도로 던졌다. 최고 높이를 H , 수평도달거리를 R 이라고 할 때 $\frac{H}{R}$ 를 θ 로 나타내어라.¹²⁾

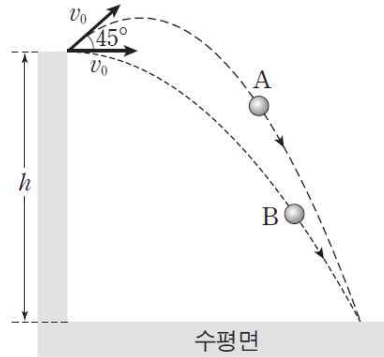
개념 POINT

8. 다음 그림과 같이 수평면에서 작은 공을 속력 v_0 로 비스듬히 위로 던져 올렸다. 공이 P 점에 도착할 때까지의 시간을 t_1 , P 점에서 지면에 닿을 때까지의 시간을 t_2 라고 할 때 P 점의 높이를 t_1 , t_2 로 나타내라.¹³⁾



개념 POINT

9. 그림은 높이 h 인 동일한 지점에서 같은 속력 v_0 으로 각각 수평 방향에 대해 45° 의 방향과 수평 방향으로 던져진 물체 A, B가 포물선 운동을 하는 것을 나타낸 것이다. A, B는 수평면 상의 같은 지점에 도달한다.¹⁴⁾



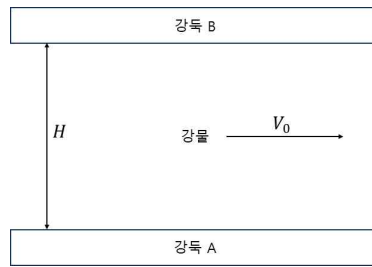
v_0 은? (단, 중력 가속도는 g 이고, 물체의 크기는 무시한다.)

- ① $\sqrt{\frac{gh}{4}}$ ② $\sqrt{\frac{gh}{2}}$ ③ \sqrt{gh} ④ $\sqrt{\frac{3gh}{2}}$ ⑤ $\sqrt{2gh}$

개념 POINT

10. 그림과 같이 폭이 H 로 일정한 강물이 서로 나란한 강둑 A와 B 사이에서 일정한 속력 V_0 로 $+x$ 방향으로 흐르고 있다. 정지한 강물에서 $u(u > V_0)$ 의 일정한 속력으로 어느 방향으로든 운동할 수 있는 보트가 있을 때, 다음 물음에 답하시오.¹⁵⁾

개념 POINT



- (1) 보트가 $-x$ 방향으로 거리 L 만큼 이동했다가 다시 출발점으로 되돌아왔을 때, 걸린 시간을 구하시오.
- (2) 보트가 강둑 A에서 출발하여 강둑 B까지 최단 거리로 운동하였을 때, 지면에 대한 보트의 속도의 크기와 방향을 구하시오.
- (3) 보트가 강둑 A에서 출발하여 강둑 B까지 최단 시간으로 운동하였을 때, 이동 거리를 구하시오.

■ 정답과 해설

개념 POINT

1)

[정답] ③

[해설]

초기 속력을 v_0 라고 하고, 수평 성분과 연직 성분으로 나누어 접근합니다.

45° 방향이므로 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 입니다.

1. 속도 성분 분해

• 초기 수평 속도: $v_{x0} = v_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$

• 초기 연직 속도: $v_{y0} = v_0 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$

2. 수평 운동 (등속도 운동)

수평 거리 200m를 가는데 걸리는 시간 t 를 구합니다.

$$x = v_{x0}t \text{에서 } 200 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t \text{에서 } t = \frac{400}{\sqrt{2} v_0} = \frac{200\sqrt{2}}{v_0}$$

3. 연직 운동 (연직 투상 운동)

연직 위치 공식($y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$)에 표적의 높이 40m와 위에서 구한 시간 t 를 대입합니다.

$$40 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \right) \left(\frac{200\sqrt{2}}{v_0} \right) - \frac{1}{2}(10) \left(\frac{200\sqrt{2}}{v_0} \right)^2 \text{에서 } 40 = 200 - 5 \left(\frac{80000}{v_0^2} \right) \text{이므로}$$

$$v_0 = \sqrt{2500} = 50 \text{ m/s} \text{ 입니다.}$$

2)

[정답] ②

[해설]

수평으로 던져진 물체는 운동 방향을 두 성분으로 나누어 생각해야 합니다.

1. 수평 방향(x 축) 운동

수평 방향으로서는 아무런 힘이 작용하지 않으므로 등속도 운동을 합니다.

- 던진 순간의 수평 속도 $v_x = 40 \text{ m/s}$

- 지표면에 닿는 순간의 수평 속도도 여전히 40 m/s 입니다.

2. 연직 방향(y 축) 운동

연직 방향으로서는 중력이 작용하여 등가속도 운동(자유 낙하)을 합니다.

- 던진 순간의 연직 속도 $v_{y0} = 0 \text{ m/s}$

- 지표면에 닿는 순간의 연직 속도를 v_y 라고 하겠습니다.

3. 지표면에서의 속도 합성

지표면에 닿는 순간의 전체 속력(v)은 수평 속도와 연직 속도의 벡터 합입니다.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \text{ 에서 } 50^2 = 40^2 + v_y^2 \text{ 이므로 } v_y^2 = 900 \text{ 이다.}$$

따라서, 지표면에 닿는 순간의 연직 속도 $v_y = 30 \text{ m/s}$ 입니다.

4. 도달시간(t) 계산

연직방향은 가속도가 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 인 등가속도 운동이므로 속도 공식($v_y = g \cdot t$)을 적용합니다.

$$30 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}^2 \times t \text{ 에서 } t = 3 \text{ s} \text{ 입니다.}$$

3)

[정답] ①

[해설]

포물선 운동에서 최고점 도달 시간을 결정하는 핵심 요소는 ‘초기 연직 속도(v_y)’입니다.

1. 최고점 도달 시간(T) 공식

물체가 최고점에 도달하면 연직 방향 속도가 0이 됩니다. 초기 연직 속도를 v_{y0} , 중력가속도를 g 라고 하면

$$0 = v_{y0} - gT \text{ 에서 } T = \frac{v_{y0}}{g}$$

2. 초기 연직 속도 비교

초기 속력을 v , 던진 각도를 θ 라고 하면 초기 연직 속도는 $v_{y0} = v \sin \theta$ 입니다. 문제에서 초기 속력 v 는 모두 같으므로, 시간 T 는 $\sin \theta$ 값에 비례합니다.

$$T_A \propto \sin 30^\circ, \quad T_B \propto \sin 45^\circ, \quad T_C \propto \sin 60^\circ$$

3. 대소 관계 비교

각도 θ 가 커질수록($0^\circ < \theta < 90^\circ$)범위에서 $\sin \theta$ 값도 커집니다.

$$\sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ$$

따라서 $T_A < T_B < T_C$ 가 성립합니다.

4)

[정답] ③

[해설]

초기 속도 v_0 를 수평 성분 v_x 와 연직 성분 v_y 로 나누어 분석합니다.

1. 초기 수평 속도 (v_x) 구하기

포물선 운동에서 수평 방향은 등속도 운동을 합니다.

- 두 점 A($t=1$)와 B($t=3$)사이의 시간 간격 $\Delta t=3-1=2$ 초
- 두 점 사이의 수평 거리 $\Delta x=20$ m

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20\text{m}}{2\text{s}} = 10\text{m/s}$$

2. 초기 연직 속도 (v_y) 구하기

두 점 A,B의 높이가 같다는 것은 포물선의 대칭축(최고점)을 기준으로 시간상 대칭임을 의미합니다.

- 최고점 도달 시간 t_T 은 두 시간의 중간값인 $\frac{1+3}{2}=2$ 초입니다.
- 최고점에서는 연직 속도가 0이 되므로, $v_y - g \cdot t_T = 0$ 공식을 적용합니다.

$$v_y - (10 \cdot 2) = 0 \quad \text{에서} \quad v_y = 20\text{m/s}$$

3. 초기 속력 (v_0) 계산

피타고라스 정리를 이용하여 속력을 합성합니다.

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{에서} \quad v_0 = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{100 + 400} = \sqrt{500}$$

따라서 $v_0 = 10\sqrt{5}$ m/s 입니다.

5) [정답] ㉔

[해설]

이 문제에서 가장 중요한 키워드는 “가장 짧은 거리”입니다. 강을 가장 짧은 거리로 건넌다는 것은 배의 최종 합성 속도가 강둑에 대해 수직이 되어야 함을 의미합니다.

1. 속도 벡터 설정

- 강의 유속(v_w): 6m/s(하류 방향)
- 배의 속력(v_b): 10m/s
- 배의 실제 이동 방향: 강둑과 수직인 방향이 되어야 하므로, 배는 상류 쪽으로 비스듬히 노를 저어야 합니다.

2. 수직 방향의 합성 속도(v) 계산

직각삼각형의 피타고라스 정리를 이용합니다. 배의 속력(10)이 빗변이 되고, 강의 유속(6)이 한 변이 됩니다.

$$v = \sqrt{v_b^2 - v_w^2} \quad \text{에서}$$

$$v = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\text{m/s}$$

개념 POINT

즉, 배는 강둑에 대해 수직 방향으로 8m/s 의 속도로 움직이게 됩니다.

3. 시간(t) 계산

강폭이 200m 이므로, 수직 방향 속력으로 나눕니다.

$$t = \frac{\text{강폭}}{\text{수직 속력}} = \frac{200\text{m}}{8\text{m/s}} = 25 \text{ 초 입니다.}$$

6)

[정답] 초당 15방울

[해설]

$x_0 = 19.6\text{cm}$ 인 곳에서 중력가속도 $g = -9.8\text{m/s}^2$ 으로 정지상태로부터 낙하하였다. 싱크대 바닥에 물방울이 닿는 순간 새로운 물방울이 수도꼭지에서 나오게 된다. 물방울이 주기 T 의 간격으로 수도꼭지에서 나온다고 하자. 두 개의 물방울이 공중에 떠 있고 네 번째 물방울이 막 출발하려고 하므로 첫 번째 물방울이 출발한 이후 $3T$ (3주기)가 지난 순간임을 알 수 있다. 그때의 첫 번째 물방울이 바닥에 닿으므로

$$x = 0 = 19.6\text{cm} - \frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)(3T)^2$$

따라서 $3T = \sqrt{\frac{2(19.6\text{cm})}{(980\text{cm/s}^2)}} = 0.2\text{s}$ 가 되어서

$$T = \frac{0.2\text{s}}{3}$$

따라서 1초 동안 떨어지는 방울의 수는

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2\text{s}/3} = 15\text{s}^{-1}$$

7)

[정답] 8.45m

[해설] 자유낙하한지 t_1 이 지난 후 창문의 위를 통과한다고 하자. 그리고 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 라고 하면 $t_1 + \Delta t$ 일 때 창문의 아래를 통과한다.

t_1 과 $t_1 + \Delta t$ 사이에 이동거리가 창문의 높이 $h = 1.25\text{m}$ 가 된다.

$$h = \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = gt_1\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2$$

따라서

$$t_1 = \frac{h}{g\Delta t} - \frac{1}{2}\Delta t = \frac{1.25\text{m}}{(10\text{m/s}^2)(0.1\text{s})} - \frac{1}{2}(0.1\text{s})$$

$$= 1.25\text{s} - 0.05\text{s} = 1.2\text{s}$$

창문의 아래턱까지 자유낙하 하는데 걸리는 시간은 $t_1 + \Delta t$ 이므로

$$H_2 = \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2}(10\text{m/s}^2)(1.3\text{s})^2 = 8.45\text{m}$$

8)

[정답] $g = \frac{2l}{t_2^2 - t_1^2}$

[해설]

t_1 에서 t_2 까지 막대의 길이만큼 낙하한다.

$$l = \frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

정리하면 $g = \frac{2l}{t_2^2 - t_1^2}$

9)

[정답] 30.6m

[해설] 체공시간을 t_2 라고 하고 $\Delta t = 1$ s라고 하자.

$t_2 - \Delta t$ 동안 전체 낙하거리의 36%를 낙하한다.

$$\frac{1}{2}g(t_2 - \Delta t)^2 = \frac{36}{100} \frac{1}{2}gt_2^2$$

에서 $t_2 - \Delta t = \frac{6}{10}t_2$ 가 되며

$$t_2 = \frac{5}{2}\Delta t = 2.5 \text{ s}$$

이다.

전체 낙하한 거리는

$$H = \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(2.5 \text{ s})^2 = 30.625 \text{ m} \approx 30.6 \text{ m}$$

10)

[정답] (1) 25m/s (2) 30m (3) 5m/s (4) 1.25m

[해설]

(1) 가속도 : $a = -g = -10 \text{ m/s}^2$, 시간 : $t = 2$ 초 또는 3초

시간 t 후의 속도를 v 라고 하면 $v = v_0 - gt$ 에서

$t = 2(\text{s})$ 일 때 $v = v_0 - 10 \times 2$, $t = 3(\text{s})$ 일 때 $-v = v_0 - 10 \times 3 \quad \therefore v_0 = 25(\text{m/s})$

(2) 점 P의 높이 : $h_1 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 25 \times 2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 30(\text{m})$

또는 $h_1 = 25 \times 3 - \frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = 30(\text{m})$

(3) $v_p = v_0 - gt = 25 - 10 \times 2 = 5(\text{m/s})$

(4) 점 P에서 최고점까지의 높이를 h , 점 P를 통과할 때의 속력을 v_p , 최고점에서의 속력을 v 라고 하면 $-2gh = v^2 - v_p^2$ 에서 $v = 0$, $v_p = 5$ 이므로 $2 \times 10 \times h = 5^2 \quad \therefore h = 1.25(\text{m})$

또는 점 P로부터 최고점에 도달하는 데 걸리는 시간이 $\frac{1}{2}$ 초이므로 $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ 에서

$$h = 5 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.25(\text{m})$$

11)

[정답] (1) $\sqrt{\frac{3}{2}gh}$ (2) $\sqrt{\frac{1}{6}gh}$

[해설]

공 A의 위치는 $y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + h$

공 B의 위치는 $y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

(1) 두 공이 높이 $\frac{2}{3}h$ 에서 스치고 지날 때

$$y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{3}h \quad \dots \textcircled{1}, \quad y_B = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{3}h \quad \dots \textcircled{2}$$

식 ①, ②에서 $h = v_0 t$ 또는 $t = \frac{h}{v_0}$ 이다.

$$t = \frac{h}{v_0} \text{를 식 ①에 대입하면 } \frac{1}{3}h = \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v_0}\right)^2$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{3}{2}gh}$$

(2) 등가속도 운동이므로 $-2gy = v^2 - v_0^2$ 에서 $y = \frac{2}{3}h$, $v_0 = \sqrt{\frac{3}{2}gh}$ 를 대입하면

$$-2g\left(\frac{2}{3}h\right) = v^2 - \frac{3}{2}gh \quad \therefore v = \sqrt{\frac{1}{6}gh}$$

12)

[정답] $\frac{H}{R} = \frac{\tan\theta}{4}$

[해설]

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}, \quad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \text{이므로}$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{4}$$

13)

[정답] $h = \frac{1}{2}gt_1t_2$

[해설]

$v_0 \sin\theta = v$ 라 두면

$$h = vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

한편 바닥에 닿을 때까지 걸린 시간이 $t_1 + t_2$ 이므로

$$t_1 + t_2 = \frac{2v}{g} \quad \dots\dots\dots(2)$$

(2)에서 $v = \frac{g}{2}(t_1 + t_2)$ 를 (1)에 넣으면

$$h = \frac{g}{2}t_1t_2$$

14)

[정답] ②

[해설]

수평으로 던져진 물체 B는 수평방향의 속도가 v_0 이며, 체공시간은 $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ($\because h = \frac{1}{2}gt_2^2$)이므로 수평 도달거리는

$$R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \dots\dots\dots ①$$

이다.

A의 경우 연직방향의 변위가 t 에 대한 2차식이 되므로 이를 맨 마지막에 사용하는 방향으로 계산해 보자.

A의 체공시간을 t_1 라고 하고, 먼저 수평방향의 운동을 분석해 보자.

$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ 로 t_1 동안 R 만큼 수평으로 이동하므로 $R = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_1$ 이며 ①을 대입하면

$$\frac{v_0}{\sqrt{2}}t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{이므로}$$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}} \dots\dots\dots ②$$

이다.

이제 ②를 A의 연직방향의 운동에 대입하면 v_0 를 구할 수 있다.

$$-h = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \text{에 ②를 대입해 보자.}$$

$$-h = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{h}{g}}\right) - \frac{g}{2}\left(2\sqrt{\frac{h}{g}}\right)^2 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} - 2h$$

$$\text{따라서 } v_0 = (2h - h)\sqrt{\frac{g}{2h}} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \text{이다.}$$

15)

[정답]

$$(1) \frac{2uL}{u^2 - V_0^2} = \frac{2L}{u} \frac{1}{1 - \frac{V_0^2}{u^2}} \quad (2) \sqrt{u^2 - V_0^2} \hat{j} \quad (3) H\sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{u}\right)^2}$$

(\hat{i} 는 강물이 흐르는 방향, \hat{j} 는 강물에 수직한 윗방향)

[해설]

(1) 보트가 왼쪽으로 이동할 때 걸린 시간과 오른쪽으로 이동할 때 걸린 시간을 더하면

$$t = \frac{L}{u - V_0} + \frac{L}{u + V_0} = \frac{2uL}{u^2 - V_0^2} = \frac{2L}{u} \frac{1}{1 - \frac{V_0^2}{u^2}}$$

뱃머리의 방향을 x 축 기준으로 y 축 방향으로 θ 라 하자. 그러면 물에 대한 배의 속도는

$$\vec{u} = u \cos \theta \hat{i} + u \sin \theta \hat{j}$$

강둑에 대한 물의 속도가 $\vec{V}_0 = V_0 \hat{i}$ 이므로, 강둑에 대한 배의 속도는

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{u} = (V_0 + u \cos \theta) \hat{i} + u \sin \theta \hat{j}$$

이다.

(2) 최단 거리로 운동하는 경우 $V_0 + u \cos \theta = 0$ 이 되어야 하며 $u > V_0$ 이므로 가능하다.

$\cos \theta = -\frac{V_0}{u}$ 가 되도록 상류 쪽으로 뱃머리를 향하면

$$v = u \sin \theta = u \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{u^2 - V_0^2}$$

가 된다.

따라서 지면에 대한 보트의 속도는

$$\vec{v} = \sqrt{u^2 - V_0^2} \hat{j}$$

가 된다.

(3) 최단 시간으로 운동하는 경우 $u \sin \theta$ 가 최대가 되어야 하므로 $\theta = 90^\circ$ 로, 뱃머리가 강물이 흐르는 방향에 수직이어야 한다. 그러면 지면에 대한 배의 속도는 $\vec{v} = V_0 \hat{i} + u \hat{j}$ 가 된다.

y 방향으로 H 만큼 가는데 걸리는 시간은 $t' = \frac{H}{u}$

그동안 보트의 $+x$ 방향으로의 변위는 $V_0 t' = \frac{HV_0}{u}$

따라서 보트가 강둑 B에 도달할 때까지의 이동거리는

$$\sqrt{H^2 + \left(\frac{HV_0}{u}\right)^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{u}\right)^2} \text{이다.}$$

개념 POINT